

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

**УТВЕРЖДЕНО**  
 решением Ученого совета ФМИАТ  
 от « 21 » 06 2019 г., протокол № 5/19  
 Председатель / Волков М.А.  
 подписи, радицировка подписи  
 « 21 » 06 2019



### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

|            |                                                     |
|------------|-----------------------------------------------------|
| Дисциплина | Комбинаторика                                       |
| Факультет  | Математики, информационных и авиационных технологий |
| Кафедра    | Прикладной математики                               |
| Курс       | 3                                                   |

Направление (специальность): **10.05.01 «Компьютерная безопасность»**

Направленность (профиль/специализация): «Математические методы защиты информации»

Форма обучения: очная

Дата введения в учебный процесс УлГУ: « 01 » сентября 2019 г

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № 6 от 18.03.2020 г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № 1 от 01.09.2020 г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Сведения о разработчиках:

| ФИО           | Кафедра | Должность,<br>ученая степень, звание |
|---------------|---------|--------------------------------------|
| Верёвкин А.Б. | ПМ      | доцент, к.ф.-м.н., доцент            |
|               |         |                                      |

| СОГЛАСОВАНО                                                                                                                                 | СОГЛАСОВАНО                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Заведующий кафедрой прикладной математики,<br>реализующей дисциплину                                                                        | Заведующий выпускающей кафедры Информационной безопасности и теории управления                                                         |
| <br>Подпись / Бутов А.А. /<br>ФИО<br>« 05 » июня 2019 г. | <br>/ Андреев А.С. /<br>ФИО<br>« 21 » июня 2019 г. |

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

**Цели освоения дисциплины:** освоение основ и методов комбинаторики; овладение углубленными знаниями по комбинаторике; развитие навыков решения комбинаторных задач; формирование уровня математической культуры, достаточного для понимания и усвоения последующих курсов, базирующихся на данной дисциплине; привитие навыков исследовательской работы.

**Задачи освоения дисциплины:** изучение базовых понятий комбинаторики; изучение основных определений и теорем о перечислении и исчислении специальных множеств; формирование фундаментальных знаний об основах современной комбинаторики; приобретение навыков и умений по решению основных комбинаторных задач; изучение приложений комбинаторики в решении прикладных задач.

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина «Комбинаторика» (Б1.В.ДВ.3.2) относится к Дисциплинам по выбору Вариативной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» Основной Профессиональной Образовательной Программы по направлению подготовки – 10.05.01 Компьютерная безопасность (специалитет). Данная дисциплина базируется на входных знаниях, умениях, навыках и компетенциях студента, полученных им в школе и на предыдущих курсах обучения. Результаты освоения дисциплины будут необходимы для дальнейшего процесса обучения в рамках поэтапного формирования компетенций при изучении последующих дисциплин – «Теория вероятностей и математическая статистика», «Теория случайных процессов», «Теоретико-числовые методы в криптографии», «Математические модели информационных систем», «Теория информации», «Криптографические методы защиты информации», «Теория вычислительной сложности», «Теория псевдослучайных генераторов», «Модели безопасности компьютерных систем», «Методы алгебраической геометрии в криптографии», «Численные методы», а также для прохождения государственной итоговой аттестации.

### 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

| Код и наименование реализуемой компетенции                                                                                                                                                      | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОК-3 – способностью анализировать основные этапы и закономерности исторического развития России, её место и роль в современном мире для формирования гражданской позиции и развития патриотизма | Знать: понятия множества, мультимножества, последовательности, графа, разбиения, размещения, сочетания, рекурсии; бином Ньютона; биномиальные коэффициенты; теорию линейных рекуррентных последовательностей; числа Люка, Фибоначчи, Стирлинга, Каталана, Бернулли и Эйлера; многочлены Лагранжа, Гаусса, Бернштейна; производящие функции Гильберта, Гурвица, Эйлера и Ламберта.<br>Уметь: решать комбинаторные задачи; применять метод включения-исключения; разлагать числа по различным основаниям; строить и применять матрицу инцидентности графа; использовать линейные рекуррентные соотношения; применять специальные многочлены и производящие функции.<br>Владеть: навыками решения комбинаторных задач и применения их к задачам иных дисциплин. |
| ОПК-5 – способностью использовать нормативные правовые акты в своей профессио-                                                                                                                  | Знать: основные понятия и методы геометрии, алгебры, арифметики, математической логики, математического                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

|                                                                                        |       |                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                    |

|                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| нальной деятельности.                                                                                                                                                                                                 | анализа, дискретной математики, теории алгоритмов, теории вероятностей, математической статистики, теории информации и кодирования.<br>Уметь: использовать методы геометрии, алгебры, арифметики, математической логики, математического анализа, теории алгоритмов, дискретной математики, теории информации, теории вероятностей и математической статистики для решения теоретических и прикладных задач.<br>Владеть: методами решения теоретических и прикладных задач. |
| ПК-1 способностью осуществлять подбор, изучение и обобщение научно-технической информации, нормативных, правовых и методических материалов, отечественного и зарубежного опыта по проблемам компьютерной безопасности | Знать: эффективные математические модели информационных и физических процессов.<br>Уметь: использовать стандартные модели в профессиональной работе и адаптировать их к конкретным условиям.<br>Владеть: методами моделирования информационных и физических процессов.                                                                                                                                                                                                      |
| ПК-9 способностью участвовать в проведении экспериментально-исследовательских работ при аттестации объектов с учетом требований к уровню защищенности компьютерной системы                                            | Знать: эффективные математические модели информационных и физических процессов.<br>Уметь: использовать стандартные модели в профессиональной работе и адаптировать их к конкретным условиям.<br>Владеть: методами моделирования информационных и физических процессов.                                                                                                                                                                                                      |

#### 4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего) 2 зачетные единицы.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы (в часах) 72 часов.

| Вид учебной работы                                                      | Количество часов (форма обучения <u>очная</u> ) |                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------|
|                                                                         | Всего по Плану                                  | В т.ч. по семестрам                     |
| 1                                                                       | 2                                               | 4                                       |
|                                                                         |                                                 | 3                                       |
| Контактная работа обучающихся с преподавателем                          | 54                                              | 54                                      |
| Аудиторные занятия:                                                     | 54                                              | 54                                      |
| Лекции                                                                  | 36                                              | 36                                      |
| Практические и семинарские занятия                                      | 18                                              | 18                                      |
| Лабораторные работы (лабораторный практикум)                            | -                                               | -                                       |
| Самостоятельная работа                                                  | 54                                              | 54                                      |
| Текущий контроль (количество и вид: контр. работа, коллоквиум, реферат) |                                                 | устный опрос,<br>проверка решения задач |
| Курсовая работа                                                         | -                                               | -                                       |
| Виды промежуточной аттестации                                           | -                                               | зачет                                   |

|                                                                                        |       |                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                    |

|                           |     |     |
|---------------------------|-----|-----|
| тестации (экзамен, зачет) |     |     |
| Всего часов по дисциплине | 108 | 108 |

В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий в таблице через слеш указывается количество часов работы ППС с обучающимися для проведения занятий в дистанционном формате с применением электронного обучения

#### 4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения: очная.

| Название разделов и тем                         | Всего | Виды учебных занятий |                                |                                 |                               |                        | Форма текущего контроля знаний       |
|-------------------------------------------------|-------|----------------------|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|------------------------|--------------------------------------|
|                                                 |       | Аудиторные занятия   |                                |                                 | Занятия в интерактивной форме | Самостоятельная работа |                                      |
|                                                 |       | Лекции               | Практические занятия, семинары | Лабораторные работы, практикумы |                               |                        |                                      |
| 1                                               | 2     | 3                    | 4                              | 5                               | 6                             | 7                      | 8                                    |
| <i>Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы</i> |       |                      |                                |                                 |                               |                        |                                      |
| 1. Целочисленные функции                        | 12    | 4                    | 2                              | –                               |                               | 6                      | устный опрос, проверка решения задач |
| 2. Перестановки, выборки и размещения           | 12    | 4                    | 2                              | –                               |                               | 6                      | устный опрос, проверка решения задач |
| 3. Комбинаторные задачи арифметики и анализа    | 12    | 4                    | 2                              | –                               |                               | 6                      | устный опрос, проверка решения задач |
| 4. Производящие функции                         | 12    | 4                    | 2                              | –                               |                               | 6                      | устный опрос, проверка решения задач |
| 5. Разложения по степенному основанию           | 12    | 4                    | 2                              | –                               |                               | 6                      | устный опрос, проверка решения задач |
| 6. Рекуррентные соотношения                     | 6     | 2                    | 1                              | –                               |                               | 3                      | устный опрос, проверка решения задач |
| <i>Раздел 2. Специальные числа</i>              |       |                      |                                |                                 |                               |                        |                                      |
| 7. Числа                                        | 6     | 2                    | 1                              | –                               |                               | 3                      | устный                               |

|                                                                                        |       |                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                    |

|                                             |     |    |    |   |  |    |                                      |
|---------------------------------------------|-----|----|----|---|--|----|--------------------------------------|
| Фибоначчи                                   |     |    |    |   |  |    | опрос, проверка решения задач        |
| 8. Биномиальные коэффициенты и их обобщения | 6   | 2  | 1  | – |  | 3  | устный опрос, проверка решения задач |
| 9. Числа Каталана                           | 6   | 2  | 1  | – |  | 3  | устный опрос, проверка решения задач |
| 10. Числа Бернулли и Стирлинга              | 6   | 2  | 1  | – |  | 3  | устный опрос, проверка решения задач |
| <i>Раздел 3. Комбинаторные теории</i>       |     |    |    |   |  |    |                                      |
| 11. Разбиения и симметрические функции      | 6   | 2  | 1  | – |  | 3  | устный опрос, проверка решения задач |
| 12. Теория инвариантов                      | 6   | 2  | 1  | – |  | 3  | устный опрос, проверка решения задач |
| 13. Теория графов                           | 6   | 2  | 1  | – |  | 3  | устный опрос, проверка решения задач |
| Итого                                       | 108 | 36 | 18 | – |  | 54 |                                      |

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы

#### Тема 1. Целочисленные функции.

Принцип индукции для натуральных чисел. Принципы полноты вещественных чисел. Функции «пол», «потолок», «дробная часть» и их свойства. Функция Мёбиуса и формулы обращения Мёбиуса. Комбинаторные применения факториалов. Формула Стирлинга.

#### Тема 2. Перестановки, выборки и размещения.

Перестановки множества, их циклическое и транспозиционное представление. Алгоритмы генерирования перестановок. Системы Симса. Выборки и упорядочения. Распределения и заполнения. Сочетания с повторениями.

#### Тема 3. Комбинаторные задачи арифметики и анализа.

Перечисление элементов множества, правила суммы и произведения. Принцип включения-исключения в терминах множеств и функций. Задачи о размене и взвешивании. Алгоритм Евклида и его обобщения. НОД и НОК. Задачи на сочетание периодов. Решение линейного диофантового уравнения. Конечные разности и вычисление конечных сумм. Формула суммирования Эйлера. Формальные функциональные ряды и произведения. Различные типы последовательностей.

#### Тема 4. Производящие функции.

Общее понятие производящей функции. Производящие функции Дирихле, Гильберта,

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

Гурвица, Эйлера, Ламберта и Вейля. Теорема Вандермонда. «Теневое» исчисление. Коэффициентные методы исчисления комбинаторных сумм.

**Тема 5.** Разложения по степенному основанию.

Двоичное разложение натуральных и вещественных чисел. Двоичный вес натуральных чисел. Разложение натуральных чисел по степеням двойки с повторениями.  $k$ -ичное разложение натуральных чисел и  $k$ -ичный вес.

**Тема 6.** Рекуррентные соотношения.

Рекуррентные последовательности и их производящие функции. Связь рекуррентных последовательностей с квазимногочленами. Линейная и мультипликативная замкнутость рекуррентных последовательностей.

**Раздел 2. Специальные числа**

**Тема 7.** Числа Фибоначчи.

Числа Фибоначчи и их производящая функция. Формула Бине для чисел Фибоначчи, их асимптотика. Теорема Цаккендорфа и фибоначчиева система исчисления.

**Тема 8.** Биномиальные коэффициенты и их обобщения.

Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля. Целозначные полиномы. Мультиномиальные коэффициенты. Неполные биномиальные суммы и многочлены Бернштейна. Гауссовы многочлены. Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов. Перечисление подпространств пространства над конечным полем. Два  $q$ -бинома Ньютона. Перестановки мультимножеств.  $q$ -Мультиномиальный коэффициент и перечисление перестановок мультимножества. Перечисление беспорядков. Число и  $q$ -полином перестановок с заданным множеством спуска.

**Тема 9.** Числа Каталана.

Триангуляция выпуклых многоугольников и числа Каталана. Расстановка скобок и другие интерпретации чисел Каталана.

**Тема 10.** Числа Бернулли и Стирлинга.

Суммирование последовательных степеней. Числа Бернулли и Эйлера. Числа Стирлинга первого и второго рода. Связь между числами Стирлинга. Комбинаторные соотношения и производящие функции для чисел Стирлинга.

**Раздел 3. Комбинаторные теории**

**Тема 11.** Разбиения и симметрические функции.

Разбиения натуральных чисел, диаграммы и производящие функции. Симметрические функции и многочлены, их производящие функции. Теорема Гильберта и Нётер о симметрических функциях. Разбиения на разные части. Пентагональная лемма Эйлера и тождество Якоби. Перечисление разбиений, содержащихся в прямоугольнике. Перестановки с ограничением на расположение. Ладейные многочлены.

**Тема 12.** Теория инвариантов.

Действие групп на множествах и пространствах. Орбиты и инварианты. Цикловой индекс. Формула Бернсайда и лемма Пойа. Оператор Рейнольдса. Перечисление алгебраических инвариантов. Формулы Молина, Форманека и их обобщения.

**Тема 13.** Теория графов и гиперграфов.

Матрица инцидентности ориентированного графа. Перечисление путей в ориентированных и неориентированных графах. Нахождение кратчайших путей в графе. Перечисление графов и деревьев. Теорема Кэли о помеченных деревьях. Перечисление конечных слов с конечным числом обструкций. Понятие гиперграфа. Теорема Холла о системах различных представителей множеств. Теорема Рамсея.

## 6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

## **Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы**

**Тема 1.** Целочисленные функции (семинар).

**Тема 2.** Перестановки, выборки и размещения (семинар).

**Тема 3.** Комбинаторные задачи арифметики и анализа (семинар).

**Тема 4.** Производящие функции (семинар).

**Тема 5.** Разложения по степенному основанию (семинар).

**Тема 6.** Рекуррентные соотношения (семинар).

**Вопросы по темам раздела** (для обсуждения на занятии и самостоятельного изучения).

1. Принцип индукции для натуральных чисел.
2. Функции «пол», «потолок», «дробная часть» и их свойства.
3. Функция Мёбиуса и формулы обращения Мёбиуса.
4. Комбинаторные применения факториалов.
5. Формула Стирлинга.
6. Перестановки множества, их циклическое и транспозиционное представление.
7. Алгоритмы генерирования перестановок.
8. Выборки и упорядочения. Распределения и заполнения. Сочетания с повторениями.
9. Перечисление элементов множества, правила суммы и произведения.
10. Принцип включения-исключения в терминах множеств и функций.
11. Задачи о размене и взвешивании.
12. Алгоритм Евклида и его обобщения. НОД и НОК.
13. Задачи на сочетание периодов.
14. Решение линейного диофантового уравнения.
15. Конечные разности и вычисление конечных сумм.
16. Формула суммирования Эйлера.
17. Различные типы последовательностей.
18. Производящие функции Дирихле, Гильберта, Гурвица, Эйлера, Ламберта и Вейля. «Теневое» исчисление.
19. Коэффициентные методы исчисления комбинаторных сумм.
20. Двоичное разложение натуральных и вещественных чисел.
21. Двоичный вес натуральных чисел.
22. Разложение натуральных чисел по степеням двойки с повторениями.
23. k-ичное разложение натуральных чисел и k-ичный вес.
24. Рекуррентные последовательности и их производящие функции.
25. Связь рекуррентных последовательностей с квазимногочленами.
26. Линейная и мультипликативная замкнутость рекуррентных последовательностей.

## **Раздел 2. Специальные числа**

**Тема 7.** Числа Фибоначчи (семинар).

**Тема 8.** Биномиальные коэффициенты и их обобщения (семинар).

**Тема 9.** Числа Каталана (семинар).

**Тема 10.** Числа Бернулли и Стирлинга (семинар).

**Вопросы по темам раздела** (для обсуждения на занятии и для самостоятельного изучения).

27. Числа Фибоначчи и их производящая функция.
28. Формула Бине для чисел Фибоначчи, их асимптотика.
29. Теорема Цаккендорфа и фибоначчиева система исчисления.
30. Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты.
31. Треугольник Паскаля.
32. Целозначные полиномы.
33. Мультиномиальные коэффициенты.

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

34. Неполные биномиальные суммы и многочлены Бернштейна.
35. Гауссовы многочлены.
36. Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов.
37. Перечисление подпространств пространства над конечным полем.
38. Два  $q$ -бинома Ньютона.
39. Перестановки мультимножеств.
40.  $q$ -Мультиномиальный коэффициент и перечисление перестановок мультимножества.
41. Перечисление беспорядков.
42. Число и  $q$ -полином перестановок с заданным множеством спуска.
43. Триангуляция выпуклых многоугольников и числа Каталана.
44. Расстановка скобок и другие интерпретации чисел Каталана.
45. Суммирование последовательных степеней.
46. Числа Бернулли и Эйлера.
47. Числа Стирлинга первого и второго рода.
48. Связь между числами Стирлинга.
49. Комбинаторные соотношения и производящие функции для чисел Стирлинга.

### **Раздел 3. Комбинаторные теории**

**Тема 11.** Разбиения и симметрические функции (семинар).

**Тема 12.** Теория инвариантов (семинар).

**Тема 13.** Теория графов и гиперграфов (семинар).

**Вопросы по темам раздела** (для обсуждения на занятии и для самостоятельного изучения).

50. Разбиения натуральных чисел, диаграммы и производящие функции.
51. Симметрические функции и многочлены, их производящие функции.
52. Теорема Гильберта и Нётер о симметрических функциях.
53. Разбиения на разные части.
54. Перечисление разбиений, содержащихся в прямоугольнике.
55. Перестановки с ограничением на расположение.
56. Ладейные многочлены.
57. Действие групп на множествах и пространствах.
58. Орбиты и инварианты.
59. Цикловой индекс.
60. Формула Бернсайда и лемма Пойа.
61. Оператор Рейнольдса.
62. Перечисление алгебраических инвариантов.
63. Формулы Молина, Форманека и их обобщения.
64. Матрица инцидентности ориентированного графа.
65. Перечисление путей в ориентированных и неориентированных графах.
66. Нахождение кратчайших путей в графе.
67. Перечисление графов и деревьев.
68. Теорема Кэли о помеченных деревьях.
69. Перечисление конечных слов с конечным числом обструкций.
70. Понятие гиперграфа.
71. Теорема Холла о системах различных представителей множеств.
72. Теорема Рамсея.

## **7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ**

Данный вид работы не предусмотрен УП.

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

## 8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Выполнение курсовых, контрольных работ и рефератов не предусмотрено учебным планом.

*Примерная тематика самостоятельных работ по дисциплине «Комбинаторика»:*

1. Нахождение комбинаторных формул методом полной индукции.
2. Производящие функции и их применение.
3. Нахождение рекуррентных соотношений.
4. Асимптотика чисел Фибоначчи.
5. Бином Ньютона.
6. Суммирование степеней и полиномов.
7. Применение симметрических функций.
8. Вычисление инвариантов действий групп.
9. Перечисление путей в графах.
10. Перечисление конечных слов с обструкциями.

## 9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Принцип индукции для натуральных чисел.
2. Принципы полноты вещественных чисел.
3. Определение функций «пол», «потолок», «дробная часть» и их свойства.
4. Функция Мёбиуса и формулы обращения Мёбиуса.
5. Перестановки множества, их циклическое и транспозиционное представление.
6. Алгоритмы генерирования перестановок. Системы Симса.
7. Задачи о размене и взвешивании.
8. Алгоритм Евклида и его обобщения. НОД и НОК.
9. Задачи на сочетание периодов.
10. Решение линейного диофантового уравнения.
11. Формальные функциональные ряды и произведения, их свойства.
12. Типы последовательностей. Общее понятие производящей функции.
13. Производящие функции Дирихле, Гильберта, Гурвица, Эйлера, Ламберта и Вейля.
14. Теорема Вандермонда. Начала «теневого» исчисления.
15. Коэффициентные методы исчисления комбинаторных сумм.
16. Двоичное разложение натуральных и вещественных чисел.
17. Двоичный вес натуральных чисел.
18. Разложение натуральных чисел по степеням двойки с повторениями.
19. k-ичное разложение натуральных чисел и k-ичный вес.
20. Числа Фибоначчи и их производящая функция.
21. Формула Бине для чисел Фибоначчи, их асимптотика.
22. Теорема Цаккендорфа и фибоначчиева система исчисления.
23. Рекуррентные последовательности и их производящие функции.
24. Связь рекуррентных последовательностей с квазимногочленами.
25. Линейная и мультипликативная замкнутость рекуррентных последовательностей.
26. Факториалы - их свойства и комбинаторные применения. Формула Стирлинга.
27. Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля.
28. Целозначные полиномы.
29. Мультиномиальные коэффициенты и их свойства.
30. Перечисление элементов множества, правила суммы и произведения.

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

31. Выборки и упорядочения. Распределения и заполнения. Сочетания с повторениями.
32. Неполные биномиальные суммы и многочлены Бернштейна.
33. Конечные разности и вычисление конечных сумм.
34. Формула суммирования Эйлера.
35. Гауссовы многочлены. Треугольник Паскаля для Гауссовых многочленов.
36. Перечисление подпространств пространства над конечным полем.
37. Два  $q$ -бинома Ньютона.
38. Перестановки мультимножеств.  $q$ -Мультиномиальный коэффициент и перечисление перестановок мультимножества.
39. Принцип включения-исключения в терминах множеств и функций.
40. Перечисление беспорядков.
41. Число и  $q$ -полином перестановок с заданным множеством спуска.
42. Триангуляция выпуклых многоугольников и числа Каталана.
43. Расстановка скобок и другие интерпретации чисел Каталана.
44. Числа Стирлинга первого и второго рода. Связь между числами Стирлинга.
45. Комбинаторные соотношения и производящие функции для чисел Стирлинга.
46. Суммирование последовательных степеней. Числа Бернулли и Эйлера.
47. Разбиения натуральных чисел, их производящие функции и диаграммы Юнга.
48. Симметрические функции и многочлены, их производящие функции.
49. Теорема Гильберта и Нётер о симметрических функциях.
50. Разбиения на разные части.
51. Пентагональная лемма Эйлера и тождество Якоби.
52. Перечисление разбиений, содержащихся в прямоугольнике.
53. Перестановки с ограничением на расположение. Ладейные многочлены.
54. Действие групп на множествах и пространствах. Орбиты и инварианты.
55. Цикловой индекс. Формула Бернсайда и лемма Пойа.
56. Оператор Рейнольдса. Перечисление алгебраических инвариантов.
57. Формулы Молина, Форманека и их обобщения.
58. Матрица инцидентности ориентированного графа.
59. Перечисление путей в ориентированных и неориентированных графах.
60. Нахождение кратчайших путей в графе.
61. Перечисление графов и деревьев.
62. Теорема Кэли о помеченных деревьях.
63. Перечисление конечных слов с конечным числом обструкций.
64. Теорема Холла о системах различных представителей множеств.
65. Теорема Рамсея.

## 10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ

Форма обучения: очная.

| Название разделов и тем                         | Вид самостоятельной работы ( <i>проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная работа, подготовка к сдаче зачета, экзамена и др.</i> ) | Объем в часах | Форма контроля ( <i>проверка решения задач, реферата и др.</i> ) |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------------|
| <i>Раздел 1. Комбинаторные понятия и методы</i> |                                                                                                                                                                    |               |                                                                  |
| 1. Целочисленные функции                        | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                                                                            | 6             | устный опрос, проверка решения задач                             |

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

|                                              |                                                                                                          |   |                                      |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------|
| 2. Перестановки, выборки и размещения        | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 6 | устный опрос, проверка решения задач |
| 3. Комбинаторные задачи арифметики и анализа | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 6 | устный опрос, проверка решения задач |
| 4. Производящие функции                      | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 6 | устный опрос, проверка решения задач |
| 5. Разложения по степенному основанию        | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 6 | устный опрос, проверка решения задач |
| 6. Рекуррентные соотношения                  | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 3 | устный опрос, проверка решения задач |
| <i>Раздел 2. Специальные числа</i>           |                                                                                                          |   |                                      |
| 7. Числа Фибоначчи                           | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 3 | устный опрос, проверка решения задач |
| 8. Биномиальные коэффициенты и их обобщения  | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 3 | устный опрос, проверка решения задач |
| 9. Числа Каталана                            | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 3 | устный опрос, проверка решения задач |
| 10. Числа Бернулли и Стирлинга               | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 3 | устный опрос, проверка решения задач |
| <i>Раздел 3. Комбинаторные теории</i>        |                                                                                                          |   |                                      |
| 11. Разбиения и симметрические функции       | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 3 | устный опрос, проверка решения задач |
| 12. Теория инвариантов                       | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к сдаче зачета                                  | 3 | устный опрос, проверка решения задач |
| 13. Теория графов и гиперграфов              | Проработка учебного материала, решение задач, подготовка к контрольной работе, подготовка к сдаче зачета | 3 | устный опрос, проверка решения задач |

## 11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### а) Список рекомендуемой литературы

#### основная

1. Власов Николай Анатольевич Некоторые задачи комбинаторики.: учеб. пособие / Н.А. Власов. - Ульяновск: УлГУ, 2002. - 45 с.
2. Вечтомов, Е. М. Математика: логика, множества, комбинаторика: учебное пособие для бакалавриата и специалитета / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 243 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

06612-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/441204>

#### дополнительная

3. Гашков, С. Б. Дискретная математика: учебник и практикум для вузов / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 483 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11613-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/445753>
4. Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 279 с. — (Университеты России). — ISBN 978-5-534-00871-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/432016>
5. Гисин, В. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Б. Гисин. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 383 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00228-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://www.biblio-online.ru/bcode/432144>

#### учебно-методическая

6. Верёвкин А.Б. Комбинаторика [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов специальности "Математика", Фундаментальная и прикладная алгебра", "Компьютерная безопасность" / Веревкин Андрей Борисович; УлГУ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 1,18 МБ). - Ульяновск : Качалин Александр Васильевич, 2018. — URL: [http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/1301/Verevkin\\_Combinatorics\\_2018.pdf](http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/1301/Verevkin_Combinatorics_2018.pdf)
7. Кемер, А.Р. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие для информ. специальностей / А.Р. Кемер. — Ульяновск : УлГУ, 2007. — 63 с. — URL: <ftp://10.2.5.225/FullText/Text/kemer.pdf>
8. Михеева Елизавета Алексеевна Дискретная математика : учебно-метод. пособие для 1 и 2 курсов фак. математики и информ. технологий / Михеева Елизавета Алексеевна; УлГУ, Фак. математики и информ. технологий. - Ульяновск : УлГУ, 2008. - 39 с.
9. Штраус, Л.А. Пределы: методические указания для студентов факультета математики и информационных технологий и факультета управления / Л.А. Штраус, И.В. Барина. — Ульяновск : УлГУ, 2012. — 32 с. — URL: <ftp://10.2.96.134/Text/Shtraus1.pdf>

Согласовано:

Г.С.Сиб-ра И.Б. УлГУ Полкина И.С. фев  
 Должность сотрудника научной библиотеки ФИО подпись дата

**б) Программное обеспечение:** МойОфис Стандартный, Альт Рабочая станция 8.

**в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы**

1. Электронно-библиотечные системы:

1.1. IPRbooks [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / группа компаний Ай Пи Эр Медиа. — Электрон. дан. — Саратов, [2019]. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru>.

1.2. ЮРАЙТ [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Электронное издательство ЮРАЙТ. — Электрон. дан. — Москва, [2019]. — Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru>.

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

- 1.3. Консультант студента [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Политехресурс. – Электрон. дан. – Москва, [2019]. – Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/pages/catalogue.html>.
- 1.4. Лань [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО ЭБС Лань. – Электрон. дан. – С.-Петербург, [2019]. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com>.
- 1.5. Znanium.com [Электронный ресурс]: электронно-библиотечная система / ООО Знаниум. – Электрон. дан. – Москва, [2019]. – Режим доступа: <http://znanium.com>.
2. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: справочная правовая система / Компания «Консультант Плюс». – Электрон. дан. – Москва : КонсультантПлюс, [2019].
3. База данных периодических изданий [Электронный ресурс] : электронные журналы / ООО ИВИС. – Электрон. дан. – Москва, [2019]. – Режим доступа: <https://dlib.eastview.com/browse/udb/12>.
4. Национальная электронная библиотека [Электронный ресурс]: электронная библиотека. – Электрон. дан. – Москва, [2019]. – Режим доступа: <https://нэб.рф>.
5. Электронная библиотека диссертаций РГБ [Электронный ресурс]: электронная библиотека / ФГБУ РГБ. – Электрон. дан. – Москва, [2019]. – Режим доступа: <https://dvs.rsl.ru>.
6. Федеральные информационно-образовательные порталы:
- 6.1. Информационная система [Единое окно доступа к образовательным ресурсам](http://window.edu.ru). Режим доступа: <http://window.edu.ru>.
- 6.2. Федеральный портал [Российское образование](http://www.edu.ru). Режим доступа: <http://www.edu.ru>.
7. Образовательные ресурсы УлГУ:
- 7.1. Электронная библиотека УлГУ. Режим доступа : <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Web>.
- 7.2. Образовательный портал УлГУ. Режим доступа : <http://edu.ulsu.ru>.

Согласовано:

Зам.начальника УИТиТ /  
Должность сотрудника УИТиТ

Клочкова А.В.  
ФИО

  
подпись

## 12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ:

Аудитории для проведения лекций, семинарских занятий, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, групповых и индивидуальных консультаций.

Аудитории укомплектованы специализированной мебелью, учебной доской. Аудитории для проведения лекций оборудованы мультимедийным оборудованием для представления информации большой аудитории. Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде, электронно-библиотечной системе. Перечень оборудования, используемого в учебном процессе, указывается в соответствии со сведениями о материально-техническом обеспечении и оснащённости образовательного процесса, размещёнными на официальном сайте УлГУ в разделе «Сведения об образовательной организации».

## 13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

|                                                                                        |       |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Министерство науки и высшего образования РФ<br>Ульяновский государственный университет | Форма |  |
| Ф-Рабочая программа дисциплины                                                         |       |                                                                                     |

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

Разработчик

*А. Верёвкин*

подпись

доцент

должность

Верёвкин А.Б.

ФИО